



## 2. Roteiros da Segunda Sequência

### Experimento 1: Circuito RLC e Ressonância

#### 2.1.1 Objetivos

- ✓ Fundamentar o conceito de impedância;
- ✓ Obter a frequência de ressonância em um circuito RLC;
- ✓ Obter a indutância de um indutor.

#### 2.1.2 Materiais Necessários

- ✓ 1 fonte DC ajustável;
- ✓ 1 fonte de AC ajustável;
- ✓ 1 capacitor ( $C = 10 \mu\text{F}$ );
- ✓ 1 resistor de  $1 \text{ K}\Omega$ .
- ✓ 1 bobina (600 espiras ou mais);
- ✓ 1 voltímetro para circuitos com corrente contínua (CC);
- ✓ 1 voltímetro para circuitos com corrente alternada (CA);
- ✓ 1 amperímetro DC;
- ✓ 1 amperímetro AC;

#### 2.1.3 Referencial Teórico

##### Circuito RLC em série de Corrente Alternada

Uma tensão alternada  $[U(t)]$  pode ser escrita na forma:

$$U(t) = U_m \text{sen} \omega t \quad (1)$$

Onde  $\omega = 2\pi f$  é a frequência angular (medida em rad/s) e  $f$  é a frequência (medida em Hz).

Em um circuito (Figura 1) que contenha uma resistência elétrica (R), um capacitor (C), e um indutor (L), ligados em série com uma fonte de corrente alternada (CA), descrita pela equação (1), aparecerá uma corrente alternada do tipo:

$$i(t) = i_m \text{sen}(\omega t - \phi) \quad (2)$$

Esta corrente elétrica surge após um tempo, determinado de *transiente*, onde a corrente elétrica varia aleatoriamente. Após este tempo, a corrente oscilará na mesma frequência angular  $\omega$  da fonte.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO  
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

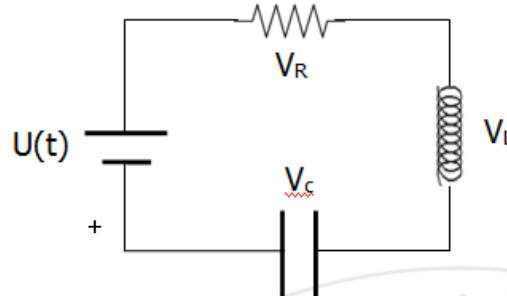


Figura 1- Representação de um circuito RLC em série, onde  $V_R$ ,  $V_L$  e  $V_C$  representam a diferença de potencial no resistor, indutor e no capacitor respectivamente.

Aplicando a lei das malhas no circuito RLC de corrente AC representado pela Figura 1, tem-se:

$$U(t) = V_R + V_L + V_C \quad (3)$$

Uma análise trigonométrica simplificada para a solução da equação (3) é obtida, considerando cada termo desta equação isoladamente. Isto pode ser feito, após o período transiente, quando a corrente possui a mesma frequência  $\omega$  da fonte.

- Para um elemento resistivo isolado,  $V_R$  tem a forma:

$$V_R(t) = i_m R \text{sen}(\omega t - \phi) \quad (4)$$

Neste caso a corrente  $i(t)$ , *está em fase* com a tensão  $V_R(t)$ .

- Para um elemento indutivo isolado,  $V_L$  tem a forma:

$$V_L(t) = i_m \omega L \text{sen}(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2}) \quad (5)$$

Neste caso a corrente elétrica  $i(t)$ , *está atrasada* de  $\phi = \pi/2$  com relação à tensão  $V_L(t)$ .

Na equação (5),  $L$  é a indutância do indutor, relacionada por:

$$V_L = L \frac{di}{dt} \quad (6)$$

E o produto  $\omega L$  reatância indutiva é definida como:

$$X_L = \omega L. \quad (7)$$



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO  
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

- Para um elemento capacitivo isolado,  $V_C$  tem a forma:

$$V_C = \frac{i_m}{\omega C} \text{sen}(\omega t - \phi - \frac{\pi}{2}) \quad (8)$$

Neste caso a corrente elétrica  $i(t)$ , *está adiantada* de  $\phi = \pi/2$  com relação à tensão  $V_C(t)$ .

Na equação (8), a reatância capacitiva é definida como:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (9)$$

Substituindo as equações (4), (5) e (8), na equação, na equação (3), obtém-se a equação:

$$U_m \text{sen} \omega t = i_m R \text{sen}(\omega t - \phi) + i_m X_L \text{sen}(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}) + i_m X_C \text{sen}(\omega t - \phi - \frac{\pi}{2}) \quad (10)$$

Que após algumas manipulações trigonométricas é reduzida a:

$$U_m \text{sen} \omega t = i_m \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \text{sen} \omega t \quad (11)$$

A corrente máxima ( $i_m$ ) no circuito é obtida diretamente por:

$$i_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \quad (12)$$

Assim, a grandeza

$$Z = \frac{U_m}{i_m} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (13)$$

é denominada de *impedância* no circuito RLC em série.

Observa-se que a impedância no circuito possui característica de resistência elétrica, mas adquire valores diferentes, para frequências angulares ( $\omega$ ) distintas.

É possível regular a frequência ( $f$ ) da fonte, onde o valor da corrente ( $i_m$ ) no circuito adquire seu valor máximo. Esta frequência, denominada de *frequência de ressonância* ( $f_{\text{RESS}}$ ) é uma característica do circuito, que depende exclusivamente dos valores escolhidos para a indutância e capacitância. Obtém-se o valor da frequência de ressonância diretamente da equação (13), na condição em que a amplitude da corrente é máxima. Isto ocorre quando:



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO  
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

$$X_L = X_C \implies \omega L = \frac{1}{\omega C} \implies \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (14)$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (15)$$

Uma forma experimental de se analisar a ressonância, é observar por meio de um osciloscópio, quando as amplitudes das tensões no capacitor ( $V_{oC}$ ) e no indutor ( $V_{oL}$ ) se igualam.

Outra forma de se analisar um circuito RLC em série, é representá-lo graficamente, através de um *diagrama de fasores* (Figura 2), as equações (1), (2), (4), (5) e (8) para  $U(t)$ ,  $i(t)$ ,  $V_R(t)$ ,  $V_L(t)$  e  $V_C(t)$  respectivamente.

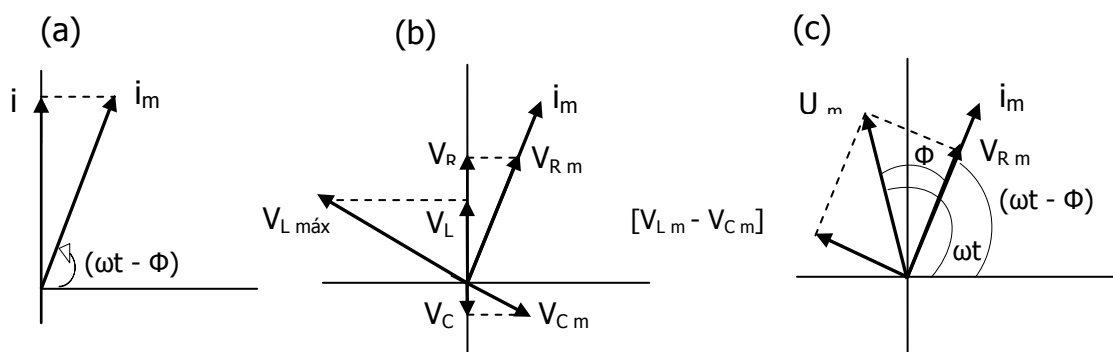


Figura 2 –(a) Um fasor representando a corrente alternada em um circuito RLC em série. (b) Fasores representando a tensão oscilante entre os terminais do resistor, do indutor e do capacitor. Note que, em relação à corrente, a tensão no resistor está em fase, no indutor está adiantado de  $\pi/2$ , e no capacitor está atrasado de  $\pi/2$ . (c) Foi adicionado um fasor representando a tensão alternada da fonte e sua relação fasorial com  $V_R$ ,  $V_L$  e  $V_C$ .

Na Figura 2(a), representa-se o fasor de corrente elétrica do circuito. Na Figura 2(b), os fasores para cada componente do circuito e, em 2(c), representa-se cada fasor com sua fase, em relação à corrente. Conforme o tempo passa, cada fasor descreve círculos com relação à origem. A projeção destes fasores no eixo vertical, em qualquer intervalo de tempo, dá as equações trigonométricas exatas de corrente e tensão, para cada componente do circuito.

Analisando a Figura 2(c), obtém-se:

$$U_m = \sqrt{V_{Rm}^2 + (V_{Lm} - V_{Cm})^2}$$



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO  
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

$$= \sqrt{(i_m R)^2 + (i_m X_L - i_m X_C)^2} \quad (16)$$

$$U_m = i_m \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Um circuito RLC pode ter características resistiva, indutiva ou capacitiva, dependendo se a tensão da fonte está em fase, adiantada ou atrasada com relação à fonte. Abaixo um resumo destas condições:

O ângulo de fase  $\phi$  é dado por:

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) \quad (17)$$

- Se  $\phi > 0$ , o circuito é *indutivo* e a tensão está *adiantada* em relação à corrente.
- Se  $\phi < 0$ , o circuito é *capacitivo* e a tensão está *atrasada* em relação à corrente.
- Se  $\phi = 0$ , o circuito é *resistivo* e diz-se que a corrente e a tensão *estão em fase*. Nesta condição,  $X_L = X_C$ , o que implica em  $V_L = V_C$ , que é a condição de ressonância.
- O circuito será puramente indutivo se a frequência,  $f$ , da fonte de tensão CA for muito maior que a frequência de ressonância e, será puramente capacitivo, se a frequência,  $f$ , adquirir um valor muito menor que a frequência de ressonância.

### Medidas em corrente alternada.

Geralmente os voltímetros e amperímetros medem tensão eficaz e corrente eficaz, ao invés de tensão máxima  $V_m$  ou corrente máxima  $i_m$ . O valor eficaz  $i_{ef}$  ou valor médio quadrático de uma corrente alternada, é a corrente capaz de dissipar a mesma quantidade de calor numa resistência ôhmica, produzida por uma corrente contínua  $i$ , em um mesmo intervalo de tempo, sendo definida matematicamente por:

$$i_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (18)$$

Onde  $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$  é o período de oscilação da corrente alternada do tipo:

$$i(t) = i_m(\text{sen}\omega t - \phi)$$

O valor eficaz da corrente alternada está relacionado com o valor máximo  $i_m$ , pela equação:



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO  
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

$$i_{ef} = \frac{i_m}{\sqrt{2}} \quad (19)$$

Da mesma forma, a tensão eficaz alternada é:

$$V_{ef} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \quad (20)$$

Para simplificar a notação, representa-se  $V_{ef}$  e  $i_{ef}$  por  $V$  e  $i$ . Nesta notação simplificada, impedância pode ser definida como:

$$Z = \frac{V}{i} \quad (21)$$

Considera-se  $Z$  como uma "resistência generalizada" denominada impedância.

### 2.1.4 Procedimento Experimental

1. Faça a leitura nominal dos valores de resistência do resistor ( $R \pm \Delta R$ ), da capacitância do capacitor ( $C \pm \Delta C$ ) e da indutância do indutor ( $L \pm \Delta L$ ). Anote os dados nos espaços abaixo:

( $R \pm \Delta R$ )	
( $C \pm \Delta C$ )	
( $L \pm \Delta L$ )	

2. Monte um circuito RLC em série, com a fonte de tensão alternada, conforme a ilustração da Figura 1. Faça as conexões dos canais 1 e 2, do osciloscópio, conforme a ilustração desta figura.
3. Utilize os três métodos a seguir para obter a frequência de ressonância ( $f_o$ ) do circuito RLC série:
  - Utilizando apenas um canal do osciloscópio, varie a frequência de alimentação até encontrar a situação em que a amplitude da tensão no resistor ( $V_{Rm}$ ) passa por um máximo.



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO**  
**CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO**  
 Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

(sugestão: Use escala de 500 mV para tensão e 500  $\mu$ s para o tempo). Anote o valor obtido no espaço abaixo.

$f_o \pm \Delta f_o =$

- Conecte aos canais 1 e 2 do osciloscópio as tensões no indutor e no capacitor e localize a frequência em que as amplitudes de tensão se igualam. (Sugestão: escala de tensão de 2,00 V e tempo de 500  $\mu$ s para ambos os canais). Anote o valor obtido no espaço abaixo.

$f_o \pm \Delta f_o =$

- Conecte aos canais 1 e 2 do osciloscópio as tensões no resistor e na fonte e localize a frequência em que estas tensões encontram-se em fase. Use as mesmas escalas do item anterior. Anote o valor obtido no espaço abaixo.

$f_o \pm \Delta f_o =$

4. Faça uma varredura em frequências em torno de  $f_o$ , variando a frequência da tensão alimentadora desde valores bem abaixo de  $f_o$  até valores bem acima de  $f_o$ . Meça diretamente na tela do osciloscópio os valores das amplitudes  $V_{Cm}$  e  $V_{Lm}$ . Use um multímetro digital para medir a tensão eficaz no resistor ( $V_{R_{eficaz}} = \frac{V_{Rm}}{\sqrt{2}}$ ). Anote

os dados na Tabela abaixo:

Tabela 1 – Valores medidos de frequências, amplitudes da tensão no indutor e no capacitor e, valores eficaz no resistor.

$f \pm \Delta f$ ( )	$V_{Lm} \pm \Delta V_{Lm}$ ( )	$V_{Cm} \pm \Delta V_{Cm}$ ( )	$V_R^{eficaz} \pm \Delta V_R^{eficaz}$ ( )



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO  
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

$f_0 \pm \Delta f_0$			

### 2.1.5 O que Incluir no Relatório do Experimento:

- Deduza as equações (11) e (12).
- Escreva uma expressão para as amplitudes de tensão no resistor ( $V_{oR}$ ), no capacitor ( $V_{oC}$ ) e no indutor ( $V_{oL}$ ). Estas expressões devem estar em termos de  $R$ ,  $\omega$ ,  $U_{máx}$ ,  $C$  e  $L$ .
- Apresente os valores experimentais obtidos de frequência de ressonância, de acordo com os três métodos utilizados no item 3 da parte procedimento experimental. Compare estes valores com aquele obtido diretamente dos valores nominais de  $C$  e  $L$ .





UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO  
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

- Monte um gráfico mostrando as variações de  $V_{Cm}$ ,  $V_{Lm}$  e  $V_{Rm}$  em função de  $f$ . Inclua neste gráfico, a impedância do circuito RLC série, usando os valores nominais de  $L$ ,  $C$  e  $R$ . Comente o comportamento da impedância próximo a frequência de ressonância.
- Obtenha a partir deste gráfico um valor para a frequência de ressonância do circuito RLC série. Compare este valor com aquele obtido a partir dos valores nominais de  $L$  e  $C$  e com os valores obtidos diretamente do osciloscópio e do multímetro.

### Questões a serem discutidas no relatório do experimento

1. Qual o significado físico do fenômeno de ressonância ? Explique comparando com o fenômeno similar que ocorre em diversos sistemas mecânicos.
2. Imagine que alguém lhe entregue um capacitor (ou um indutor) e lhe peça para determinar experimentalmente o valor de sua capacitância (ou indutância). Explique como os procedimentos utilizados nessa experiência podem ser aplicados para essa finalidade.
3. Como se pode concluir, num circuito RLC série, se a frequência de uma tensão senoidal aplicada está acima ou abaixo da frequência de ressonância ?
4. A potência média dissipada em um circuito RLC série pode ser escrita como

$$P_{méd} = \frac{1}{2} U_m I_m \cos\phi$$

Sendo o termo  $\cos\phi$  chamado de *fator de potência*. Quanto menor for o ângulo de fase  $\phi$  (entre a tensão aplicada e a corrente), mais resistivo será o circuito e maior a taxa de transferência de energia da fonte para o resistor. Explique que parâmetros podem ser ajustados na prática para se obter um valor ideal para o ângulo de fase.

### 2.1.6 Bibliografia

Apostila de física experimental da UFES, Centro de Ciências Exatas, Goiabeiras – ES.

Física 4. Halliday, Resnick e Krane. 4ª edição. Editora LTC, Rio de Janeiro RJ (1996).

Ótica, Relatividade, Física Quântica. H. Moysés Nussenzveig. 4ª edição. Editora Blucher, São Paulo SP (2011).