Transformação de Velocidades ($S' \rightarrow S$)

Neste ponto temos como ferramental básico as transformações de Lorentz que são

1 - $\Delta x = \gamma(\Delta x' + u\Delta t')$

2 - $\Delta y = \Delta y'$

3 - $\Delta z = \Delta z'$

4 - $\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{u\Delta x'}{c^2}\right)$

De posse destas relações, vamos relacioná-las a fim de obtermos a transformação da velocidade de uma partícula em S' para S, isto é;

Se uma partícula possui velocidade v' medida a partir de S', que velocidade terá se medida a partir do referencial S ?

Vamos chamar de v' a velocidade relativa ao referencial S' e de v a velocidade relativa ao referencial S.

$$\Rightarrow v' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{deslocamento em } S' \\ \rightarrow \text{tempo gasto no deslocamento medido em } S' \end{array}$$

$$\Rightarrow v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \rightarrow \frac{\text{desloc. medido no ref. } S}{\text{tempo gasto no desloc. medido em } S}$$

Mas pela equação 1, acima $\Rightarrow \Delta x = \gamma(\Delta x' + u\Delta t')$

e por 4 $\Rightarrow \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{u\Delta x'}{c^2}\right)$

$$\Rightarrow v = \frac{\cancel{\gamma}(\Delta x' + u\Delta t')}{\cancel{\gamma}\left(\Delta t' + \frac{u\Delta x'}{c^2}\right)}$$

"$\Delta t'$ em evidência"

mas $\Delta x'/\Delta t' = v'$

$$\Rightarrow v = \frac{\cancel{\Delta t'}\left(\Delta x'/\Delta t' + u\right)}{\cancel{\Delta t'}\left(1 + \frac{u}{c^2}\frac{\Delta x'}{\Delta t'}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \frac{v' + u}{1 + \frac{uv'}{c^2}}}$$

Componente Vertical

A equação obtida na página anterior é relativa às velocidades ao longo dos eixos $\hat{x}$ e $\hat{x}'$, logo:

$$v_x = \frac{v_x' + u}{1 + \frac{u v_x'}{c^2}}.$$

Para a componente $\hat{y}, \hat{y}'$ o procedimento é análogo.

$$\Rightarrow v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad \text{mas} \quad \Delta y = \Delta y' \quad \text{e}$$

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{u \Delta x'}{c^2}\right)$$

$$v_y = \frac{\Delta y'}{\gamma\left(\Delta t' + \frac{u \Delta x'}{c^2}\right)} = \frac{\Delta y'/\Delta t'}{\gamma\left(1 + \frac{u}{c^2}\frac{\Delta x'}{\Delta t'}\right)}$$

mas $\frac{\Delta y'}{\Delta t'} = v_y'$

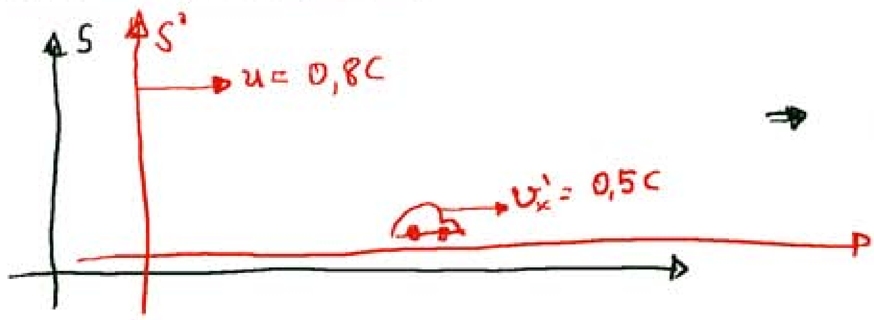
$$\Rightarrow \boxed{v_y = \frac{v_y'}{\gamma\left(1 + \frac{u v_x'}{c^2}\right)}}$$

Para a componen v_z, também perpendicular à velocidade,

$$\Rightarrow \boxed{v_z = \frac{v_z'}{\gamma\left(1 + \frac{u v_x'}{c^2}\right)}}$$

"A seguir alguns exercícios como exemplos"

1) Exemplo óbvio.



$\Rightarrow v_x = ?$

Classicamente seria:

$$v_x = u + v_x'$$

$$v_x = (0,8 + 0,5)\,c = 1,3\,c$$ "maior que c"

Relativisticamente é:

$$v_x = \frac{u + v_x'}{1 + \frac{u v_x'}{c^2}}$$

$$v_x = \frac{(0,8 + 0,5)\,.\,c}{1 + 0,5\,.\,0,8} \cong 0,93\,c$$ "menor que c"

—//—

OBS: E se fizéssemos $u = 0,99c$ e $v_x' = 0,99c$?

$$\Rightarrow v_x' = \frac{(0,99 + 0,99)}{1 + 0,99\,.\,0,99}\,.\,c = 0,99995c$$

$v_x' \approx c$ "tende a $\underline{c}$ mas não chega".

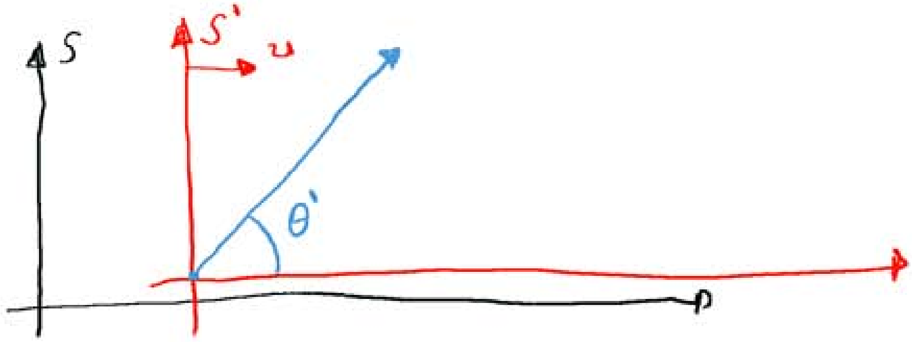
Se $u = c$ e $v_x' = c$?

$$v_x = \frac{2c}{1 + \frac{c^2}{c^2}} = \frac{2c}{2} = c$$ $\Rightarrow$ Limite máximo.

"Classicamente daria $\underline{2c}$".

Exercício 4

Um feixe de luz é produzido a partir do centro de S', fazendo um ângulo θ' com $\hat{x}'$. Obter o ângulo θ com relação à $\hat{x}$ de S.



Velocidades em S':

$$\left.\begin{aligned} v_x' &= c\cos(\theta') \\ v_y' &= c\,\text{sem}(\theta') \end{aligned}\right\} \quad \text{tag}(\theta') = \frac{\text{sen}(\theta')}{\cos(\theta')} = \frac{v_y'}{v_x'}$$

$$\Rightarrow \text{tag}(\theta) = \frac{v_y}{v_x} \quad ,$$

mas
$$\begin{cases} v_y = \dfrac{v_y'}{\gamma\left(1 + \dfrac{u v_x'}{c^2}\right)} = \dfrac{c\,\text{sen}(\theta')}{\gamma\left(1 + \dfrac{u.c.\cos(\theta')}{c^2}\right)} \\[2em] v_x = \dfrac{u + v_x'}{1 + \dfrac{u v_x'}{c^2}} = \dfrac{u + c.\cos(\theta')}{1 + \dfrac{u.c.\cos(\theta')}{c^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{tag}(\theta) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{c.\text{sen}(\theta')}{\gamma\cancel{\left(1 + \frac{u\cos(\theta')}{c}\right)}} \cdot \frac{\cancel{\left(1 + \frac{u\cos(\theta')}{c}\right)}}{u + c.\cos(\theta')}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \text{tag}^{-1}\left\{\frac{c.\text{sen}(\theta')}{\gamma.(u + c.\cos(\theta'))}\right\}}$$

Obs: $\begin{cases} \text{Se } u = 0 & \theta = \theta' \\ \text{se } u = c & \theta \to \text{zero} \end{cases}$